ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE

CONCOURS 1985

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

N.B. — Diverses questions de ce problème peuvent être traitées en admettant, si on ne les a pas démontrés, certains résultats donnés par l'énoncé; c'est le cas, entre autres, des six dernières questions de la partie III.

$\mathcal{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal d'un plan affine euclidien, M (tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$) est un point mobile par rapport à $\mathcal{R}$; on désigne par $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ le vecteur vitesse instantané de M à l'instant t et on suppose qu'à chaque instant t le vecteur-accélération instantané de M est : $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \gamma\vec{i} - k \| \vec{V} \| \vec{V}$, γ et k étant deux constantes strictement positives.

Dans tout le problème, la variable temps, t, ne prend que des valeurs positives; on rappelle que la vitesse algébrique d'un point mobile est le rapport de son vecteur-vitesse au vecteur unitaire de la tangente orientée à sa trajectoire.

PRÉAMBULE

Écrire le système (1) des équations différentielles caractérisant le mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}$. On posera $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ et on vérifiera que (1) est formé de deux équations différentielles du premier ordre en X et Y considérées comme fonctions inconnues du temps t.

On suppose, dans toute cette partie, qu'à l'instant $t = 0$, M coïncide avec l'origine O, sa vitesse initiale étant nulle.

I.1. On suppose que (1) admet une solution $t \longmapsto (X_0(t), Y_0(t))$ dérivable pour tout $t > 0$, nulle pour $t = 0$, dérivable à droite pour $t = 0$.

I.1. *a*. Démontrer l'existence d'au moins un réel $\beta > 0$ tel que :

$(\forall\, t \in]0, \beta[)\ (X_0(t) > 0)$. En déduire que X_0 et Y_0 sont indéfiniment dérivables sur $I_\beta =]0, \beta[$.

I.1. *b*. Démontrer que X_0 et Y_0 sont deux fois (au moins) dérivables à droite pour $t = 0$. On précisera les valeurs de $X_0'(0)$, $Y_0'(0)$, $X_0''(0)$, $Y_0''(0)$, ainsi que la partie principale par rapport à t de $X_0(t)$ pour t voisin de 0. Que peut-on dire du comportement de $Y_0(t)$ pour t voisin de 0 ?

I.1. *c*. Montrer l'existence d'une fonction φ continue sur $[0, +\infty[$, telle que $\varphi(0) = 0$ et que Y_0 soit solution de l'équation différentielle : $\dfrac{dY}{dt} = -k\gamma t\,[1 + \varphi(t)]\,Y$.

En déduire que Y_0 est la fonction nulle.

I.2. On garde l'hypothèse énoncée au I.1. ; la trajectoire de M est donc incluse dans la droite $(O, \vec{i})$. Montrer que la vitesse algébrique instantanée V, de M vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{dV}{dt} = \gamma - k \mid V \mid V$.

I.2.*a*. Expliciter V et l'abscisse x de M en fonction de t ; par quel intervalle peut-on finalement remplacer I_β ? Trouver, par deux méthodes différentes la partie principale de x par rapport à t, pour t voisin de 0.

I.2 *b*. Étudier les variations de x fonction de t et construire sa courbe représentative par rapport à un repère orthonormé (t en abscisse, x en ordonnée). On étudiera en particulier avec précision la branche infinie de cette courbe et sa concavité.

I.3. Quelles conclusions concernant le système (1) peut-on tirer de l'étude faite aux I.1 et I.2 ?

II

On suppose dans toute cette partie qu'à l'instant $t = 0$, M coïncide avec l'origine O, sa vitesse initiale étant : $-v_0\vec{i}$ $(v_0 > 0)$,

II.1. On suppose que (1) admet une solution $t \longrightarrow (X_1(t), Y_1(t))$ dérivable pour tout $t > 0$, dérivable à droite pour $t = 0$, et vérifiant :

$$X_1(0) = -v_0, \quad Y_1(0) = 0.$$

II.1. *a*. Démontrer l'existence d'au moins un réel $\beta_1 > 0$ tel que : $(\forall\, t \in]0, \beta_1[)\ (X_1(t) < 0)$; en déduire que X_1 et Y_1 sont indéfiniment dérivables sur $]0, \beta_1[$.

II.1. *b*. Donner, en justifiant leur existence, les développements limités au 1er ordre de $X_1(t)$ et $Y_1(t)$ pour t voisin de 0.

II.1. *c*. Montrer l'existence d'une fonction φ_1, continue sur $[0, +\infty[$, telle que $\varphi_1(0) = 0$ et que Y_1 soit solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dY}{dt} = -k\, v_0 [1 + \varphi_1(t)]\, Y.$$ En déduire que Y_1 est la fonction nulle.

II.2. On garde l'hypothèse énoncée au II.1 ; la trajectoire de M est donc incluse dans la droite $(O; \vec{i})$; montrer que la vitesse algébrique instantanée, V, de M vérifie l'équation : $\frac{dV}{dt} = \gamma - k\,|V|\,V$.

II.2.*a*. Expliciter V en fonction de t pour $t \in [0, \beta_1]$; quelle est la plus grande valeur possible de β_1 ? Préciser t_0 tel que $V(t_0) = 0$; exprimer $x(t)$ en fonction de $t \in [0, \beta_1]$ et t_0. Simplifier l'expression de $x(t_0)$ en fonction de v_0.

II.2. *b*. Que peut-on dire du mouvement de M pour $t > t_0$? Représenter graphiquement (t en abscisse, x en ordonnée, repère orthonormal) les variations de x fonction de t, t variant de 0 à $+\infty$. Exprimer en fonction de v_0 la valeur $t_1 > 0$ telle que $x(t_1) = 0$.

III

Soit $\alpha \in]0, \pi[$ un réel donné indépendant du temps.

Dans cette partie, on suppose que le mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}$ est réalisé dans les conditions de la partie I, mais que de plus $\mathcal{R}$ est animé d'un mouvement de translation par rapport à un autre repère orthonormal $\mathcal{R}_1 = (O_1; \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ de sorte que $(\forall\, t)$ $(\vec{i} = \vec{i}_1$ et $\vec{j} = \vec{j}_1)$ et que le point O décrive, d'un mouvement uniforme de vitesse algébrique $c > 0$, l'axe D_α d'origine O_1 et dirigé par le vecteur : $\vec{u} = \cos\alpha \cdot \vec{i}_1 + \sin\alpha \cdot \vec{j}_1$. On suppose de plus qu'à l'instant initial $t = 0$, le point O coïncide avec O_1.

III.1. Démontrer que les cordonnées de M par rapport à $\mathcal{R}_1$ sont, à l'instant t

$$\begin{cases} x_1 = ct\cos\alpha + \frac{1}{k}\ln \operatorname{ch}(\sqrt{k\gamma}\, t) \\ y_1 = ct\sin\alpha \end{cases}$$

(ln désigne le logarithme népérien, ch le cosinus hyperbolique).

Soit Γ_α la trajectoire de M par rapport à $\mathcal{R}_1$.

III.2. Γ_α peut-elle avoir un ou des points d'inflexion ?

III.3. Quelle condition doivent vérifier γ, k et c pour qu'il existe des valeurs de α telles que Γ_α ait au moins un point à tangente perpendiculaire à D_α ? Quelles sont alors ces valeurs de α ? Et dans chacun de ces cas, combien Γ_α a-t-elle de points répondant à la condition ?

III.4. Discuter suivant les divers cas les comportements de x_1 et y_1 lorsque t devient infini positif.

III.5. Former une équation cartésienne de Γ_α et déterminer, lorsqu'elle existe, une équation cartésienne de son asymptote Δ_α ; vérifier que Δ_α passe par un point, qu'on précisera, indépendant de α.

III.6. Trouver l'ensemble décrit, lorsque α varie, par le centre du cercle oscillateur à Γ_α en O_1.

III.7. On suppose maintenant $c = \sqrt{\frac{\gamma}{k}}$.

III.7.*a*. Étudier les diverses formes de trajectoires Γ_α. Que peut-on dire des directions de D_α et Δ_α ?

III.7.*b*. Exprimer en fonction de k et α les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}_1$ du point d'abscisse minimale de Γ_α, étudier leurs variations (k étant fixé). Tracer sur une même figure l'ensemble décrit par ce point et les divers types de trajectoires Γ_α.